1.3. Монотонные последовательности

План

1. Монотонные и строго монотонные ЧП
2. Теорема о сходимости монотонных ЧП
3. Два варианта определения супремума и инфимума множества
4. Задача о пределе ЧП равном e

ЧП $\{x_n\}$ называется **неубывающей** (**невозрастающей**), если каждый последующий член этой ЧП не меньше (не больше) предыдущего, то есть если для всех номеров n справедливо неравенство:

$$x_n \leq x_{n+1} \ \ (x_n \geq x_{n+1}).$$

Неубывающие и невозрастающие ЧП объединяются общим наименованием **монотонные ЧП**.

Если элементы монотонной ЧП для всех номеров n удовлетворяют неравенству $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, то ЧП $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**. Возрастающие и убывающие ЧП называются **строго монотонными**.

Очевидно, что невозрастающие ЧП ограничены сверху, а неубывающие ЧП ограничены снизу своими первыми элементами. Невозрастающая ЧП будет ограничена с обеих сторон, если она ограничена снизу, а неубывающая ЧП будет ограничена с обеих сторон, если она ограничена сверху.

Примеры:

1) ЧП $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots$ является невозрастающей. Она ограничена сверху своим первым элементом, равным 1, а снизу – числом 0.

2) ЧП $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ является возрастающей. Она ограничена с обеих сторон: снизу – первым элементом $\frac{1}{2}$, а сверху, – например, числом 1.

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества $\{x\}$ называется **точной верхней гранью** этого множества и обозначается символом $\overline{x} = \sup\{x\}$, который читается «супремум x».

Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $\{x\}$ называется **точной нижней гранью** этого множества и обозначается как $\underline{x} = \inf\{x\}$, который читается «инфимум x».

Пусть $\overline{x}$ – есть точная верхняя грань неубывающей ЧП $\{x_n\}$, то есть $\overline{x} = \min\{M\}$. Докажем, что $\{x_n\}$ сходится к пределу $\overline{x}$. Допустим противное, то есть $\overline{x}$ не является пределом $\{x_n\}$. Тогда, в соответствии с определением сходящейся ЧП, существует такое $\varepsilon > 0$, что на отрезке

$[\overline{x}-\varepsilon,\overline{x}]$ нет ни одного элемента x_n, так как $\overline{x}$ не может быть меньше предела a ЧП $\{x_n\}$. Но это противоречит тому, что $\overline{x}$ есть точная верхняя грань, ибо значение $\overline{x}-\varepsilon$ также удовлетворяет определению точной верхней грани.

Очевидно, что понятие точной верхней грани можно уточнить:

Точной верхней гранью называется такое значение $\overline{x} \geq x_n$, что $\forall \varepsilon > 0$ на отрезке $[\overline{x}-\varepsilon,\overline{x}]$ найдутся элементы ЧП $\{x_n\}$.

(Слово «найдутся» не означает, что найдутся все элементы, начиная с некоторого номера). Аналогично для точной нижней грани.

Теорема 1.15. Если неубывающая (невозрастающая) ЧП $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), то она сходится.

Другая формулировка теоремы: если монотонная ЧП ограничена с обеих сторон, то она сходится.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – неубывающая ЧП. Так как $\{x_n\}$ ограничена сверху, то по определению существует такое вещественное число M, что для всех x_n выполняется неравенство $x_n \leq M$.

Согласно последнему определению точной верхней грани $\overline{x}$: в любой левосторонней -окрестности $\overline{x}$ найдутся элементы ЧП $\{x_n\}$, хотя и не все. Поскольку $\{x_n\}$ есть неубывающая ЧП $(x_{n+1} \geq x_n)$, то, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, в -окрестности $\overline{x}$ будут находиться все элементы x_n с $n \geq N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ – номер, для которого впервые (в порядке возрастания n) выполняется неравенство $x_{N(\varepsilon)} \geq \overline{x}-\varepsilon$. А это удовлетворяет определению ЧП, сходящейся к пределу $\overline{x}$.

Доказательство для невозрастающей ЧП проводится аналогично.

Теорема доказана.

Замечание 1. Условие ограниченности монотонной ЧП является необходимым и достаточным условием её сходимости. В самом деле, если монотонная ЧП ограничена, то в силу доказанной теоремы она сходится; если же она сходится, то в силу теоремы 1.8 она ограничена.

Замечание 2. Сходящаяся ЧП $\{x_n\}$ может и не быть монотонной. Например, ЧП $\{(-1)^n/n\}$ сходится и имеет пределом число 0. Так как знаки этой ЧП чередуются, то она не является монотонной.

Следствие из теоремы 1.15. Пусть дана бесконечная система стягивающихся сегментов $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\dots,[a_n,b_n],\dots$, каждый последующий из которых содержится в предыдущем (это означает, что $a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$) и пусть разность $b_n - a_n$ (длина сегмента) стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда существует, и при том только единственная, точка c, принадлежащая всем сегментам этой системы.

Доказательство. Точка c, принадлежащая всем сегментам, может быть только одна. Если бы нашлась ещё одна такая точка d (ради определенности считаем, что $d > c$), то весь сегмент $[c, d]$ принадлежал бы всем сегментам $[a_n, b_n]$. Но тогда для любого номера n выполнялись бы неравенства $b_n - a_n \geq d - c > 0$, а это невозможно, поскольку $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Остаётся доказать, что такая точка c существует. Так как система сегментов является стягивающейся, то ЧП левых концов $\{a_n\}$ является неубывающей, а ЧП правых концов $\{b_n\}$ – невозрастающей. Поскольку обе эти монотонные ЧП ограничены, то по теореме 1.15 обе они сходятся. Из того, что разность $b_n - a_n$ при $n \to \infty$ является бесконечно малой, вытекает, что указанные ЧП имеют общий предел c, для которого справедливо неравенство $a_n \leq c \leq b_n$ для любого номера n, так как c принадлежит всем сегментам $[a_n, b_n]$. Следствие доказано.

Рассмотрим два примера сходящихся монотонных ЧП:

Пример 1. Пусть ЧП определяется рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 1,2, \dots ,$$

где в качестве x_1 можно взять любое положительное число; $a \geq 0$.

Докажем, что эта ЧП сходится к пределу $\sqrt{a}$. Прежде всего докажем существование предела $\{x_n\}$. Для этого достаточно установить, что эта ЧП ограничена снизу и, начиная с $n = 2$, является невозрастающей. По условию $x_1 > 0$. Тогда из рекуррентной формулы вытекает, что $x_2 > 0$. Продолжая эти рассуждения, докажем, что все $x_n > 0$. То есть ЧП $\{x_n\}$ ограничена снизу числом 0.

Докажем теперь, что при $n \geq 2$ все x_n удовлетворяют неравенству $x_n \geq \sqrt{a}$. Перепишем рекуррентную формулу в виде:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$$

и воспользуемся неравенством

$$t + \frac{1}{t} \geq 2$$

(которое при $t > 0$ эквивалентно неравенству $t^2 - 2t + 1 \geq 0$), принимая $t = \frac{x_n}{\sqrt{a}}$. Получим, что $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$ при любом $n \geq 1$, то есть $x_n \geq \sqrt{a}$, начиная с $n = 2$.

Докажем, что $\{x_n\}$ при $n \geq 2$ не возрастает. Из рекуррентной формулы получим:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right),$$

а отсюда, учитывая, что $x_n \geq \sqrt{a}$, найдём, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ или $x_{n+1} \leq x_n$ при $n \geq 2$. Так как $\{x_n\}$ при $n \geq 2$ невозрастающая монотонная ЧП, ограниченная снизу числом $\sqrt{a}$, то она по теореме 1.15 имеет предел, не меньший $\sqrt{a}$. Обозначим этот предел через $c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$ и, учитывая, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$, получим (см. рекуррентную формулу) $c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{a}{c}\right)$. Решая это уравнение, найдём $c = \sqrt{a}$.

Таким образом, ЧП, заданная рекуррентной формулой, сходится к $\sqrt{a}$ и используется для вычисления квадратного корня из чисел $a > 0$ на калькуляторах или в программном обеспечении.

Пример 2. Применим теорему 1.15 для доказательства существования предела ЧП $\{x_n\}$, элементы которой определяются формулой:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Докажем, что эта ЧП возрастает и ограничена сверху. Применив формулу бинома Ньютона, найдём:

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Представим это выражение в виде суммы (имеющей n слагаемых):

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогично для x_{n+1} получим сумму (из $n+1$ слагаемых):

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Непосредственным сравнением убедимся, что $x_n < x_{n+1}$, то есть ЧП $\{x_n\}$ возрастающая.

Для доказательства ограниченности этой монотонной ЧП сверху заметим, что каждое выражение в круглых скобках в последнем соотношении для x_n меньше единицы. Учитывая также, что при $k \geq 1$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

(это неравенство при $k > 2$ является строгим и легко доказывается по индукции), получим:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \ \dots - \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$
$$= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Здесь использовано равенство $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \ \dots - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$, которое легко доказать, если заметить, что каждый последующий элемент в

этой сумме по величине вдвое меньше предыдущего. Поэтому первые два слагаемых дадут $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, что в два раза больше величины 3-го слагаемого, имеющего знак минус. Так что сумма первых трёх слагаемых равна $\frac{1}{4}$ (со знаком плюс), тогда как 4-е слагаемое опять в два раза меньше этой суммы и имеет знак минус. Продолжая эти рассуждения, получим нужное равенство.

Итак, ЧП $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. По теореме 1.15 монотонная ЧП $\{x_n\}$ имеет предел, который принято обозначать числом e. Следовательно, по определению

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Легко видеть, что $x_1 = 2$. Так как монотонная ЧП $\{x_n\}$ – возрастающая и ограничена сверху числом $M = 3$, то

$$2 < e \leq 3.$$

Основная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть I. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 648 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть II. Учеб.: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 448 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – СПб., Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.

Дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1,2,3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 592 с.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. Уч. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 656 с.